Matematica Attuariale

La matematica attuariale studia la determinazione dei premi assicurativi in funzione di determinati eventi che possono verificarsi in relazione a contratti assicurativi.

Contratto di assicurazione

È un contratto in forza del quale l'assicuratore si impegna a pagare ad un beneficiario una somma prestabilita qualora si verifichi un certo evento di natura aleatoria, riguardante l'assicurato o un suo bene

Contratto di assicurazione art.1882

Giuridicamente il contratto di assicurazione è definito nell'art. 1882 del Codice Civile.

- **Art. 1882. Nozione : L'assicurazione è il contratto col quale l'assicuratore, verso pagamento di un premio , si obbliga a rivalere l'assicurato, entro i limiti convenuti, del danno ad esso prodotto da un sinistro(1904-1918), ovvero a pagare un capitale o una rendita al verificarsi di un evento attinente alla vita umana (1899, 1901, 2952).**

Tipologie delle coperture assicurative

Le assicurazioni si possono classificare in due principali categorie:

- **Assicurazioni contro i danni** **(dette anche dei rami elementari). La prestazione dell'assicuratore è un risarcimento a fronte di eventuali danni materiali subiti dall'assicurato. Questi possono consistere in danni alla persona, in danni ai beni di proprietà dell'assicurato, o ancora in situazioni di responsabilità civile, cioè danni arrecati a terzi.**
  Il carattere risarcitorio comporta l'aleatorietà dell'esborso dell'assicuratore in un dato periodo di copertura assicurativa, in genere breve. In questo caso, quindi, l'aspetto finanziario è spesso trascurabile, mentre quello statistico – probabilistico è della massima importanza.
- **Assicurazioni sulla vita.** **La prestazione dell'assicuratore consiste nel pagamento di somme al verificarsi di prestabiliti eventi inerenti la vita, e in particolare la sopravvivenza di una o più persone. Gli importi da erogare sono prestabiliti, o almeno determinabili secondo schemi di calcolo prefissati, e l'aleatorietà riguarda il "se" ed il "quando" saranno corrisposte.**

Le assicurazioni

Esistono due tipi di assicurazioni, le assicurazioni contro i danni o elementari (assicurazione contro incendi, furti,ecc.) e le assicurazioni sulla vita, che sono l'oggetto del nostro studio.
Nella definizione riportata dal Codice si parla di "assicurato", però nelle assicurazioni sulla vita occorre distinguere tre persone che possono o no coincidere, e precisamente:
-**Il contraente**, che è la persona che stipula il contratto e paga il premio;
-**Il beneficiario**, che è la persona a cui l'assicuratore pagherà la somma assicurata;
-**l'assicurato**, che è la persona la cui esistenza in vita, o la cui morte, costituisce l'evento oggetto del contratto.

Una persona stipula un contratto che prevede il pagamento al figlio di una certa somma nel caso che la moglie muoia entro una certa età. In questo contratto avremo:
-*contraente* - il padre;
-*beneficiario* - il figlio;
-*assicurato* - la moglie.

Una persona stipula un contratto che prevede il pagamento di una certa somma agli eredi in qualunque epoca avvenga la sua morte. In questo contratto avremo:
-*contraente* - persona che stipula il contratto;
-*beneficiario* – gli eredi;
-*assicurato* – persona che stipula il contratto.
Una persona stipula un contratto di rendita vitalizia da una certa età finché vive. In questo caso contraente, beneficiario e assicurato coincidono nella stessa persona.

La somma che il contraente paga si chiama **premio** e può essere **unico** o **periodico.** Il premio è unico se viene pagato in una sola volta alla stipula del contratto, è periodico se viene pagato a intervalli costanti di tempo, generalmente un anno.

Esiste una ulteriore distinzione fra premio puro e premio di tariffa.

- Il **premio puro** tiene conto solo del valore delle prestazioni che l'assicuratore si impegna a corrispondere, ed è, come in un gioco equo, la speranza matematica del valore attuale delle somme assicurate.
- Il **premio di tariffa**, o **caricato**, tiene anche conto delle spese che l'assicuratore sostiene e del guadagno che intende realizzare con questa sua attività.

Le assicurazioni sulla vita costituiscono una forma di previdenza e di risparmio.
Infatti, realizzano una forma di risparmio, in quanto l’assicurato, per il pagamento dei premi annui, risparmia una parte del proprio reddito a beneficio dei suoi eredi, se l’assicurazione è di morte, a beneficio suo , se l’assicurazione è di vita. È vero che potrebbe risparmiare impiegando il suo denaro in altre forme di investimento, ma l’assicurazione è anche previdenza.
Con l’assicurazione sulla morte, l’assicurato può garantire agli eredi il capitale assicurato se la sua morte avviene prematuramente e quindi, nel caso di pagamento di premi periodici, anche se sono stati pagati solo alcuni premi. Diversamente, se le stesse somme fossero state investite in banca, il loro montante sarebbe molto minore. D’altra parte, un’assicurazione in caso di vita, tale da prevedere il godimento di una pensione, garantisce l’assicurato per tutti gli anni che gli rimangono da vivere (se la sua vita è molto lunga) mentre, se versasse in banca le stesse somme, con i prelievi, il montante si potrebbe esaurire in un tempo minore.

Perciò l'assicurazione in caso di morte copre il rischio di morire "troppo presto" lasciando in condizioni di bisogno gli eredi, l'assicurazione di pensione copre il rischio di vivere "troppo a lungo" e di non avere i mezzi sufficienti per vivere.

Nei contratti di assicurazione si devono fissare:

•la somma o le somme assicurate;

•la scadenza di tali somme;

•le condizioni, cioè gli eventi che devono verificarsi perché l'assicuratore assolva ai suoi impegni.

I contratti di assicurazione sulla vita sono di diverso genere e suddivisibili in 3 gruppi:

-***assicurazioni in caso di vita***, nelle quali l'assicuratore è impegnato a pagare la somma, o le somme assicurate, solo se l'assicurato alla loro scadenza è in vita;

-***assicurazioni in caso di morte***, nelle quali l'assicuratore è impegnato a pagare la somma assicurata in caso di morte dell'assicurato;

-***assicurazioni miste***, che sono combinazioni di assicurazioni in caso di vita e in caso di morte.

Per il calcolo dei premi , in contratti che comportino più di una somma assicurata, si applica il principio di composizione dei contratti, per il quale il premio unico puro (per un contratto comprende più prestazioni, essendo ognuna una assicurazione) è uguale alla somma dei premi unici puri relativi ad ogni singola prestazione.
Le basi tecniche per il calcolo del premio puro sono sia di natura probabilistica, in quanto si deve poter calcolare la probabilità di sopravvivenza o di morte di un assicurato secondo una tavola demografica, sia di natura finanziaria, in quanto, essendo i contratti di lunga durata, la Compagnia di Assicurazione deve valutare le somme assicurate, tenendo conto degli investimenti dei premi riscossi e fissare così un tasso, detto tasso tecnico (generalmente 4%).
In pratica, i problemi consistono nel determinare il premio, o i premi, da versare per ottenere le prestazioni stabilite o, viceversa, nel determinare di quale somma, o di quali somme, l’assicurato o i suoi eredi potranno disporre a certe scadenze quando sono fissati i premi.

Le funzioni biometriche

La probabilità di sopravvivenza o la probabilità di morte di una persona dipendono da vari fattori; tra cui il più importante e significativo è l’età, e solo dell’età si tiene conte nel calcolo di tali probabilità.
Si tratta di valutazioni di probabilità secondo l’impostazione statistica, basate sulle frequenze e a tale scopo sono state costruite delle Tavole di sopravvivenza e di mortalità con tecniche piuttosto complesse, mediante il metodo dei decessi o il metodo dei censimenti.
Queste tavole, che partono da una popolazione teorica di 100.000 persone alla nascita (maschi e femmine), riportano per ogni età 0,1,2,3,4 ….anni, quanti individui hanno raggiunto tali età e quanti sono morti alle età di 0,1,2,3,4,…anni.

Le funzioni biometriche

Detta x l'età intera, si indicano:

- **lx** = numero delle persone viventi all'età x dell'insieme teorico di 100.000 neonati (l è l'iniziale del termine inglese "living"=vivente);
- **dx** = numero delle persone di età x che muoiono prima di avere raggiunto l'età successiva (d è l'iniziale del termine inglese "dead"= morto).

Le funzioni lx e dx sono dette funzioni biometriche, poiché sono funzioni dell'età x.

Fra esse esiste la relazione :

$$\mathbf{d_x = l_x - l_{x+1}}$$

Poiché il numero di persone di età x che muoiono prima di raggiungere l'età x+1 è uguale alla differenza fra i viventi di età x e i viventi di età x+1.

Le funzioni biometriche

I valori di lx decrescono al crescere di x fino a un'ultima età, detta età estrema, che indichiamo con la lettera greca ω (omega). L'età estrema, che di norma raggiunge o supera i cento anni, è tale che $\mathbf{L_{\omega+1}=0}$, questo significa che nessun vivente di età ω raggiunge l'età successiva. Tale condizione si può anche esprimere con la seguente notazione: $\mathbf{d_{\omega} = l_{\omega}=0}$

Dalle funzioni biometriche lx e dx si ricavano le probabilità di sopravvivere o di morire.

Si definisce **tasso annuo di sopravvivenza**, ed è data dal rapporto fra il numero di viventi all'età x+1 ed il numero dei vivente all'età x, la probabilità che una testa di età x ha di raggiungere l'età x+1:

$$p_x = \frac{l_{x+1}}{l_x}$$

Si definisce **tasso annuo di mortalità,** la probabilità che una testa di età x muoia prima di raggiungere l'età x+1:

$$q_x = 1 - p_x = 1 - \frac{l_{x+1}}{l_x} = \frac{l_x - l_{x+1}}{l_x} = \frac{d_x}{l_x}$$

Le funzioni biometriche

Oltre al tasso annuo di sopravvivenza ed al tasso annuo di mortalità, è interessante conoscere la probabilità di sopravvivere o di morire per determinati intervalli di età.

Si definisce **probabilità di sopravvivenza dopo n anni,** la probabilità che una persona di età x sia in vita dopo n anni:

$$ {}_n p_x = \frac{l_{x+n}}{l_x} $$

La probabilità di sopravvivenza dopo n anni è una probabilità composta, poiché si ottiene dal prodotto di n tassi annui di sopravvivenza.

$$ {}_n p_x = p_x \cdot p_{x+1} \cdot p_{x+2} \cdots\cdots p_{x+n-1} = \frac{l_{x+1}}{l_x} \cdot \frac{l_{x+2}}{l_{x+1}} \cdot \frac{l_{x+3}}{l_{x+2}} \cdots\cdots \frac{l_{x+n}}{l_{x+n-1}} = \frac{l_{x+n}}{l_x} $$

Le funzioni biometriche

Dalla probabilità di sopravvivenza dopo n anni ricaviamo la **probabilità di morte entro n anni (**probabilità contraria), in quanto esprime la probabilità che una testa di età x ha di morire prima di raggiungere l'età x+n :

$$/_{n}q_{x} = 1 - {}_{n}p_{x} = 1 - \frac{l_{x+n}}{l_{x}} = \frac{l_{x} - l_{x+n}}{l_{x}}$$

Dalle funzioni biometriche si ricava la **probabilità di morte differita di n anni e temporanea di 1,** ossia la probabilità che una persona di età x raggiunga l'età x+n e muoia entro un anno. Anche questa è una probabilità composta e si calcola secondo la seguente formula:

$$_{n}/\,q_{x} = {}_{n}p_{x} . q_{x+n} = \frac{l_{x+n}}{l_{x}} . \frac{d_{x+n}}{l_{x+n}} = \frac{d_{x+n}}{l_{x}}$$

Sempre dalle funzioni biometriche si può ricavare:

- la vita probabile, esprime il numero di anni che una persona di età x può ancora vivere con probabilità almeno del 50%;

- la vita media, esprime il numero medio di anni che una persona di età x può ancora vivere.

Tavola 1 - Tavole di mortalità della popolazione residente in Italia per sesso ed età al 2002

Scarica le tavole di mortalità dalla seguente URL:
http://www.istat.it/dati/catalogo/20020731_00/nserire

Home : Dati e prodotti : Catalogo : **Tavole di mortalità della popolazione italiana**

Tavole di mortalità della popolazione italiana per provincia e regione di residenza

dati e **prodotti**
- Banche dati
- Tavole di dati
- Microdati
- Catalogo
- Pubblicazioni scientifiche

argomenti
- **Popolazione -** Dinamica demografica
- **Salute e welfare -** Salute e sanità

« Archivio

Periodo di riferimento: **Anno 1998**
Diffuso il: 31 luglio 2002

Settori: **Popolazione**
Periodo dei dati: **Anno 1998**
Collana: **Informazioni**, n. 19
Anno di edizione: **2002**
Periodicità: **Annuale**
Supporti:
Pagine: **288** Dimensioni: **21,0 x 29,7 cm**
Prezzo: **20.20 € - IVA: 4%**
Edizione cartacea disponibile
Cod. ISBN: **88-458-0683-9**
Cod. SIGED: **2I012002019000000**

Con questo volume l'Istituto conferma la crescente attenzione alle caratteristiche territoriali sugli studi di mortalità. Da questa edizione le tavole di mortalità a livello nazionale, regionale e provinciale sono presentate in un unico volume perché si possa avere l'informazione territoriale più completa, ma anche più integrata dei dati di mortalità, tra quelli al momento disponibili.

Il volume contiene oltre alle tavole di sopravvivenza, i cui dati sono già disponibili sul sito internet http://demo.istat.it, una nota metodologica che illustra le innovazioni introdotte rispetto alle edizioni precedenti. La metodologia utilizzata per la costruzione dei principali indicatori biometrici è stata, infatti, rinnovata. Due sono le principali innovazioni: l'unificazione della procedura di calcolo per la costruzione delle tavole nazionali e regionali e la sostituzione del modello di Gompertz con una funzione logistica, nella stima delle

download
- Testo del volume
- Tavole e grafici
  ZIP (1676 kbyte)

per **informazioni**

Popolazione istruzione e cultura
Marco Marsili
tel. +39 06 4673.7353

Centro diffusione dati
tel. 06 4673.3102-3-5-6
fax 06 4673.3101-7
cont@ct centre

Commercializzazione dei prodotti
tel. 06 4673.3280-67
fax 06 4673.3477
editoria.acquisti@istat.it

Microsoft Excel - tavole Palazzo-Fantaccione

	living	dead	annual rate of survival	mortality rate	probability of survival after n years	Probability of dying within n years	Chance of death deferred n years and a temporary
	vivente	morto	tasso annuo di sopravvivenza	tasso annuo di mortalità	probabilità di sopravvivenza dopo n anni	Probabilità di morte entro n anni	Probabilità di morte differita di n anni e temporanea di 1
ETÀ x	Lx	Dx=Lx-L(x+1)	Px=L(x+1)/Lx	Qx=Dx/Lx	nPx=L(x+n)/Lx	/nQx=(Lx-L(x+n))/Lx	n/Qx=D(x+n)/Lx
0	100.000	597	0,994030	0,005970	0,998066	0,001934	0,000443
1	99.403	34	0,999658	0,000342			
2	99.369	29	0,999708	0,000292			
3	99.340	24	0,999758	0,000242			
4	99.316	20	0,999799	0,000201			
5	99.296	18	0,999819	0,000181			
6	99.278	17	0,999829	0,000171			
7	99.261	15	0,999849	0,000151			
8	99.246	16	0,999839	0,000161			
9	99.230	15	0,999849	0,000151			
10	99.215	16	0,999839	0,000161			
11	99.199	17	0,999829	0,000171			
12	99.182	20	0,999798	0,000202			
13	99.162	25	0,999748	0,000252			
14	99.137	33	0,999667	0,000333			
15	99.104	44	0,999556	0,000444			
16	99.060	56	0,999435	0,000565			
17	99.004	70	0,999293	0,000707			

età x= 5

anni n= 10

nPx

/nQx

n/Qx

Codice sorgente in VBA Pulsante nPX

- Private Sub CommandButton1_Click()
- Dim lx, lxn, n, x, npx, nqx, n1qx, px As Long
- Range("K2").Activate
- x = ActiveCell.Value
- n = ActiveCell.Offset(1, 0).Value
- Range("B5").Activate
- lx = ActiveCell.Offset(x, 0)
- lxn = ActiveCell.Offset(x + n, 0)
- npx = lxn / lx
- Range("F5").Activate
- ActiveCell.Offset.Value = npx
- End Sub

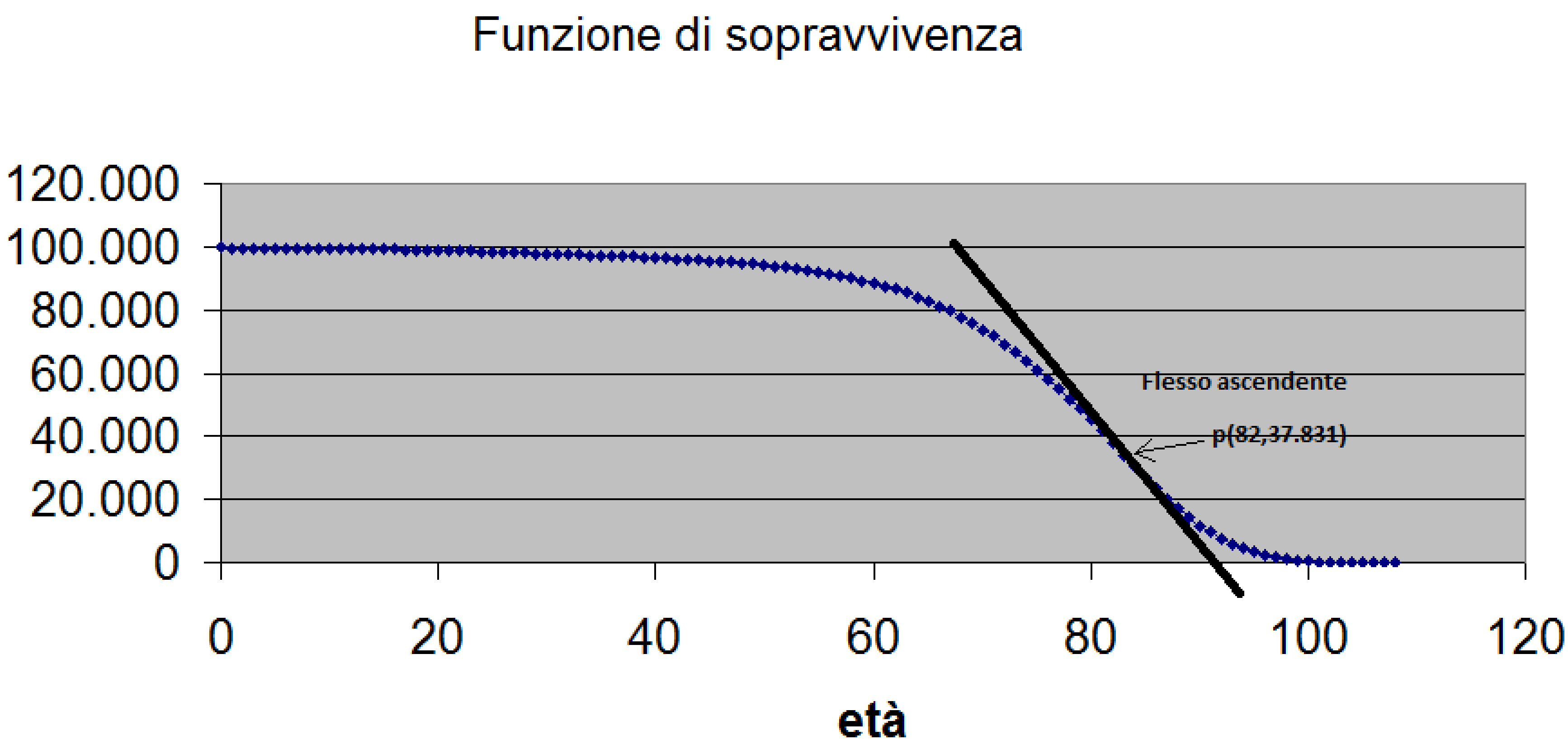
Codice sorgente in VBA Pulsante /nQx

- Private Sub CommandButton2_Click()
- Dim lx, lxn, n, x, npx, nqx, n1qx, px As Long
- Range("K2").Activate
- x = ActiveCell.Value
- n = ActiveCell.Offset(1, 0).Value
- Range("B5").Activate
- lx = ActiveCell.Offset(x, 0)
- lxn = ActiveCell.Offset(x + n, 0)
- nqx = (lx - lxn) / lx
- Range("G5").Activate
- ActiveCell.Offset.Value = nqx
- End Sub

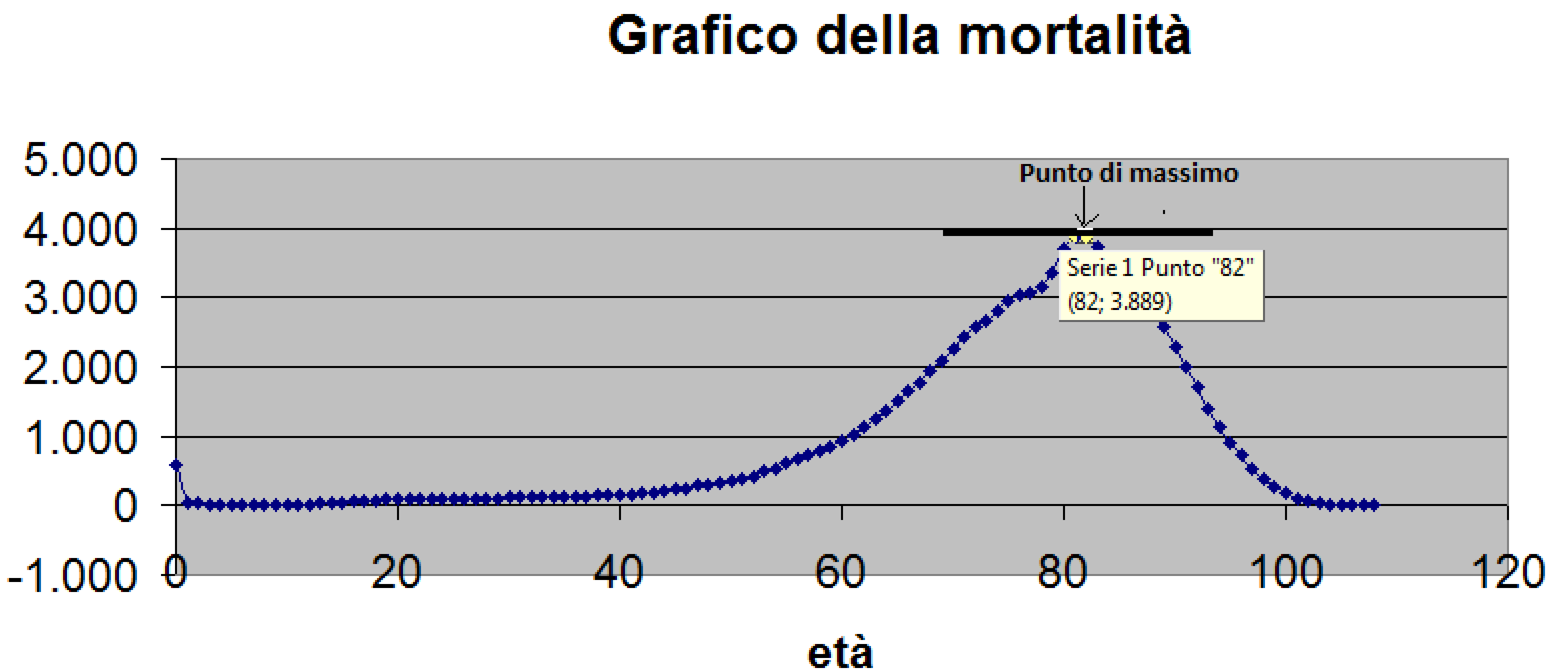
Codice sorgente in VBA
Pulsante n/Qx

- Private Sub CommandButton3_Click()
- Dim lx, dxn, n, x, npx, nqx, n1qx, px As Long
- Range("K2").Activate
- x = ActiveCell.Value
- n = ActiveCell.Offset(1, 0).Value
- Range("B5").Activate
- lx = ActiveCell.Offset(x, 0)
- Range("C5").Activate
- dxn = ActiveCell.Offset(x + n, 0)
- n1qx = dxn / lx
- Range("H5").Activate
- ActiveCell.Offset.Value = n1qx
- End Sub

Elaborazione funzione biometrica



Elaborazione funzione biometrica



Esercizio n. 1

Per un uomo di 40 anni calcolare le seguenti probabilità:

a) di sopravvivere per un anno;

b) di sopravvivere per 25 anni;

c) di morire entro 30 anni;

d) di raggiungere gli 80 anni e morire entro un anno.

Svolgimento

Per un uomo di 40 anni, utilizzando la Tavola di mortalità Italia maschi 2002, si calcolano le seguenti probabilità con approssimazione a meno di 10^{-6}:

a) $$p_{40} = \frac{l_{41}}{l_{40}} = \frac{96.311}{96.465} = 0{,}998404$$

b) $$_{25}p_{40} = \frac{l_{65}}{l_{40}} = \frac{82.680}{96.465} = 0{,}857098$$

c) $$_{/30}q_{40} = \frac{l_{40} - l_{70}}{l_{40}} = \frac{96465 - 73.737}{96.465} = 0{,}235609$$

d) $$_{40/}q_{40} = \frac{d_{80}}{l_{40}} = \frac{3.688}{96.465} = 0{,}038231$$

Esercizio n. 2

Calcolare le probabilità per due fratelli di 30 e 36 anni:

a) di essere in vita entrambi fra 15 anni;

b) che almeno uno sia in vita fra 40 anni.

Svolgimento

Supponendo che gli eventi “è in vita il primo fratello dopo n anni” e “è in vita il secondo fratello dopo n anni” siano indipendenti, per il teorema delle probabilità composte, dalla tavola di sopravvivenza Italia maschi 2002 si ricava (con approssimazione a meno di 10^{-6}):

a) $$P = {}_{15}p_{30} \cdot {}_{15}p_{36} = \frac{l_{45}}{l_{30}} \cdot \frac{l_{51}}{l_{36}} = \frac{95.592}{97.776} \cdot \frac{93.821}{97.031} = 0{,}945320$$

b) $$P = 1 - {}_{40}q_{30} \cdot {}_{40}q_{36} = 1 - \frac{l_{30} - l_{70}}{l_{30}} \cdot \frac{l_{36} - l_{76}}{l_{36}} = 0{,}762276$$

Esercizio n. 3

Determinare per un uomo di 30 anni la vita probabile, cioè quanti anni può ancora vivere con probabilità di sopravvivenza non inferiore alla probabilità di morte.

Svolgimento

Il problema si riduce a risolvere l'equazione: ${}_n p_x = \frac{1}{2}$ dove l'incognita è n=numero di anni.

Quindi:

$${}_n p_{30} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{l_{30+n}}{l_{30}} = \frac{1}{2}$$

$$l_{30+n} = \frac{1}{2}.l_{30} = \frac{1}{2}.97.776 = 48.888{,}00$$

La relazione equivale a trovare dopo quanti anni si dimezzano i viventi all'età x.

Dalle tavole si ricava:

$$78<30+n<79$$

Con l'interpolazione si ottiene

n=48 anni 4 mesi

Perciò, per un uomo di 30 anni la vita probabile è circa di 48 anni e 4 mesi.

Calcolo della vita probabile con Excel

A82 — 78

Lombardia - Maschi

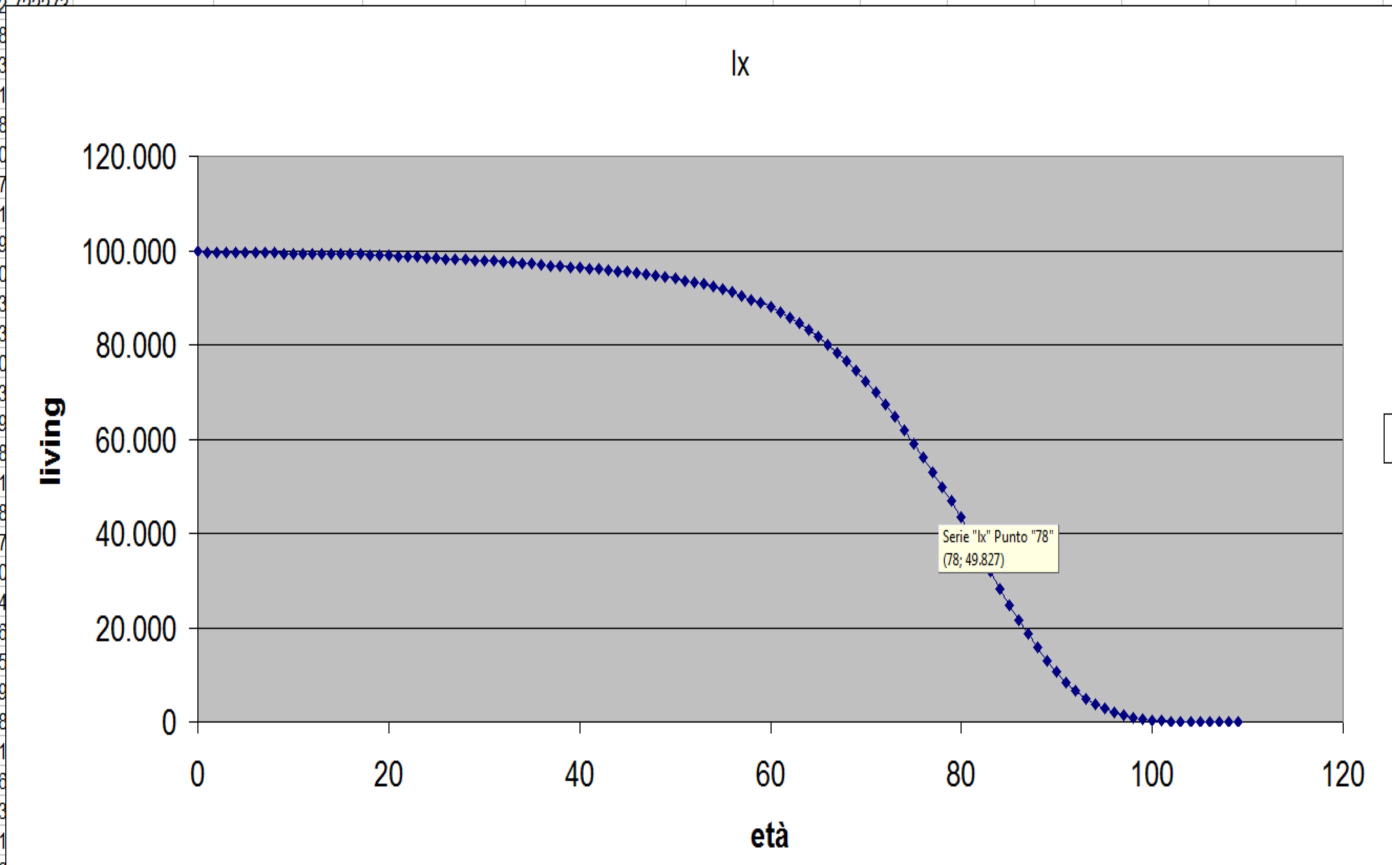
i = 4%

età x = 30

n = 10

$${}_n p_x = \frac{l_{x+n}}{l_x} \qquad {}_{/n} q_n = \frac{l_x - l_{x+n}}{l_x} \qquad {}_{n/} q_n = \frac{D_{x+n}}{l_x}$$

	ETÀ x	l_x	d_x	PX	qx	Dx	Nx
74	70	72.246	2.366	0,967251	0,032749	4639,594830	
75	71	69.880	2.537	0,963695	0,036305	4315,049739	
76	72	67.343	2.654	0,960590	0,039410	3998,453318	
77	73	64.689	2.703	0,958215	0,041785	3693,147633	
78	74	61.986	2.911	0,953038	0,046962	3402,722273	
79	75	59.075	3.050	0,948371	0,051629	3118	
80	76	56.025	3.121	0,944293	0,055707	2843	
81	77	52.904	3.077	0,941838	0,058162	2581	
82	78	49.827	3.050	0,938788	0,061212	2338	
83	79	46.777	3.275	0,929987	0,070013	2110	
84	80	43.502	3.684	0,915314	0,084686	1887	
85	81	39.818	3.936	0,901150	0,098850	1661	
86	82	35.882	3.990	0,888802	0,111198	1439	
87	83	31.892	3.743	0,882635	0,117365	1230	
88	84	28.149	3.377	0,880031	0,119969	1043	
89	85	24.772	3.185	0,871427	0,128573	883	
90	86	21.587	2.981	0,861908	0,138092	740	
91	87	18.606	2.836	0,847576	0,152424	613	
92	88	15.770	2.700	0,828789	0,171211	499	
93	89	13.070	2.457	0,812012	0,187988	398	
94	90	10.613	2.149	0,797512	0,202488	311	
95	91	8.464	1.909	0,774457	0,225543	238	
96	92	6.555	1.560	0,762014	0,237986	177	
97	93	4.995	1.243	0,751151	0,248849	130	
98	94	3.752	990	0,736141	0,263859	94	
99	95	2.762	793	0,712889	0,287111	66	
100	96	1.969	636	0,676993	0,323007	45	
101	97	1.333	464	0,651913	0,348087	29	
102	98	869	324	0,627158	0,372842	18	
103	99	545	218	0,600000	0,400000	11	
104	100	327	140	0,571865	0,428135	6	
105	101	187	85	0,545455	0,454545	3	
106	102	102	50	0,509804	0,490196	1	
107	103	52	27	0,480769	0,519231	0	



Vita probabile

Per ricavare con Excel il valore della vita probabile, così come richiesto nell'esercizio n. 3, si procede nel modo seguente:

a) si fissano i due punti esterni al valore trovato dalla formula $l_{30+n} = \frac{1}{2}.l_{30} = \frac{1}{2}.97.776 = 48.888{,}00$

punto p1(78;49.827)

punto p2(79;46.777)

b) si calcola la retta interpolante che passa per i punti p1 e p2, a tal proprosito si utilizza la funzione

TENDENZA che calcola l'equazione della retta di interpolazione lineare con il metodo dei minimi quadrati. La funzione TENDENZA restituisce il valore Y della retta corrispondente ad un valore X indicato dall'operatore.

Nel nostro caso, la variabile indipendente (variabile X) è data dal numero di sopravviventi a 78 e 79 anni, ossia:

X1=49.827 e X2=46.777

mentre la variabile dipendente (variabile Y) è data dall'età Y1=78 e Y2=79.

Il grafico, pertanto, dovrebbe essere costruito invertendo le coordinate. Riportiamo di seguito la generica funzione TENDENZA: **=TENDENZA(y_nota;x_nota;nuova_x;cost)**

c) di conseguenza**,** sostituendo i rispettivi valori della X ed Y con i rispettivi indirizzi di cella si ha

=TENDENZA(A82:A83;B82:B83;48888)

Gli argomenti della nostra funzione TENDENZA, partendo da destra, sono:

48.888 – definisce il terzo argomento (nuova_x) ed indica il valore X del quale si intende conoscere il corrispondente valore di Y;

B82:B83 – definiscono le coordinate della X a noi note, ossia 49.827 e 46.777 (le coordinate sono invertite);

A82:A83 – definiscono le coordinate della Y a noi note, cioè 78 e 79 (coordinate invertite).

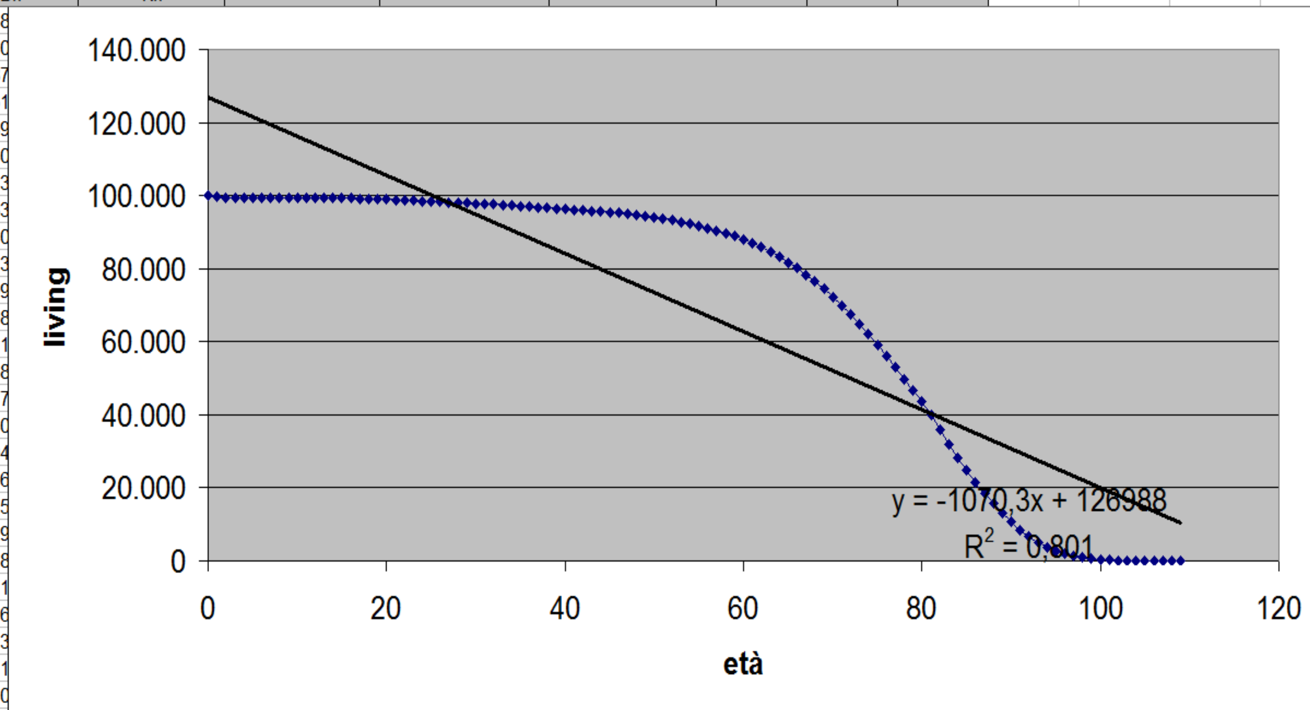
Come si può notare, abbiamo omesso il terzo argomento **(cost):** esso è un valore logico e può valere falso se la retta passa per l'origine (e quindi si ha: Y=mx), diversamente, se vale vero oppure è omesso, come nel nostro caso, la funzione viene calcolare normalmente secondo la formula Y=mx+q.

La funzione così costruita andrà a sostituire il valore X nella retta di interpolazione creata (Y=mX+q), in modo da ricavare il valore di Y. Il risultato ottenuto sarà Y=78,31, ossia, per un uomo di 30 anni la vita probabile è circa di 48 anni e 3 mesi.

Funzione TENDENZA()

J110 | =TENDENZA(A82:A83;B82:B83;48888)

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1	**Lombardia - Maschi**				i	4%			età x	30
2									n	10
3	ETÀ x	l_x	d_x	PX	qx	Dx	Nx	${}_n p_x = \frac{l_{x+n}}{l_x}$	${}_{/n} q_n = \frac{l_x - l_{x+n}}{l_x}$	${}_{n/} q_n = \frac{D_{x+n}}{l_x}$
82	78	49.827	3.050	0,938788	0,061212	2338				
83	79	46.777	3.275	0,929987	0,070013	2110				
84	80	43.502	3.684	0,915314	0,084686	1887				
85	81	39.818	3.936	0,901150	0,098850	1661				
86	82	35.882	3.990	0,888802	0,111198	1439				
87	83	31.892	3.743	0,882635	0,117365	1230				
88	84	28.149	3.377	0,880031	0,119969	1043				
89	85	24.772	3.185	0,871427	0,128573	883				
90	86	21.587	2.981	0,861908	0,138092	740				
91	87	18.606	2.836	0,847576	0,152424	613				
92	88	15.770	2.700	0,828789	0,171211	499				
93	89	13.070	2.457	0,812012	0,187988	398				
94	90	10.613	2.149	0,797512	0,202488	311				
95	91	8.464	1.909	0,774457	0,225543	238				
96	92	6.555	1.560	0,762014	0,237986	177				
97	93	4.995	1.243	0,751151	0,248849	130				
98	94	3.752	990	0,736141	0,263859	94				
99	95	2.762	793	0,712889	0,287111	66				
100	96	1.969	636	0,676993	0,323007	45				
101	97	1.333	464	0,651913	0,348087	29				
102	98	869	324	0,627158	0,372842	18				
103	99	545	218	0,600000	0,400000	11				
104	100	327	140	0,571865	0,428135	6				
105	101	187	85	0,545455	0,454545	3				
106	102	102	50	0,509804	0,490196	1				
107	103	52	27	0,480769	0,519231	[illegible]				
108	104	25	13	0,480000	0,520000	0,423129				
109	105	12	7	0,416667	0,583333	0,195290				
110	106	5	3	0,400000	0,600000	0,078241				78,31
111	107	2	1	0,500000	0,500000	0,030093				
112	108	1	1	0,000000	1,000000	0,014468				
113	109	0	0		1,000000	0,000000				
114		0			1,000000					
115					1,000000					

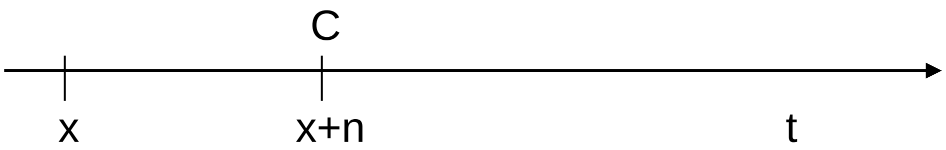


Assicurazione di capitale differito

L'assicurazione di capitale differito (detta anche assicurazione elementare di vita) è il più semplice tipo di assicurazione sulla vita.

In generale, con l'assicurazione di capitale differito, una persona di età x assicura a se stessa un capitale C, esigibile a una determinata scadenza solo se sarà in vita.

Rappresentiamo il problema con uno schema temporale:



Indichiamo con x l'età della persona e con x+n la scadenza.

Se il capitale assicurato è unitario (cioè di un euro) il suo valore attuale, alla stipulazione del contratto, è $(1+i)^{-n} = v^n$

Consideriamo la variabile casuale:

S=valore attuale delle somme che saranno pagate

La variabile casuale S può assumere i valori v^n e 0, con la seguente distribuzione di probabilità :

S	0	v^n
P	$/_n q_x$	${}_n P_x$

Calcoliamo il valore medio della variabile casuale S; tale valore medio si indica con il simbolo nEx, quindi si ha:

$$ {}_nE_x = 0 . /_n q_x + v^n . {}_n p_x = v^n . {}_n p_x = v^n . \frac{l_{x+n}}{l_x} $$

Assicurazione di capitale differito

Cioè: $${}_nE_x = v^n . \frac{l_{x+n}}{l_x}$$

Interpretiamo il contratto di assicurazione come un gioco e ricordiamo che un gioco è equo se e solo se la posta da versare per partecipare al gioco è uguale alla speranza matematica (o valore medio) della vincita lorda.

Questa speranza matematica, che indichiamo con **nEx**, è il premio unico puro che la persona di età x deve pagare per il capitale assicurato di un euro esigibile all'età x+n, a condizione di essere in vita. Per un capitale C il premio unico puro U di **un'assicurazione di capitale differito**, risulta:

$$U = C._nE_x = C.\frac{l_{x+n}}{l_x}.v^n$$

Esercizio n. 4

Una persona di 30 anni stipula un'assicurazione per garantirsi il capitale di € 30.000 a 50 anni, se sarà in vita.

Quale somma deve versare oggi?(Ossia, in forma esatta, " Qual è il premio unico puro?") Il contraente prevede la riscossione da parte dell'assicurato

(che in questo caso è anche contraente e beneficiario) del capitale di € 30.000 al compimento dei 50 anni; la condizione è che sia in vita a quell'età, nulla essendo dovuto dall'assicuratore agli eredi se quella persona muore prima di compiere 50 anni.

Svolgimento

Si deve fissare un tasso tecnico e scegliere una tavola demografica. Scegliamo la Tavola di sopravvivenza Italia maschi 2002 e calcoliamo il premio unico nel caso che il tasso sia del 4%.

$$U = 30.000.\frac{l_{50}}{l_{30}}.1{,}04^{-20} = 30.000.\frac{94.175}{97.776}.1{,}04^{-20} = 13.184{,}89$$

Tavole demografico-finanziarie

Il valore medio nEx si può esprimere in modo diverso, moltiplicando numeratore e denominatore per v^x , si ottiene:

$$ {}_nE_x = v^n . \frac{l_{x+n}}{l_x} = \frac{v^n . v^x . l_{x+n}}{v^x . l_x} = \frac{v^{x+n} . l_{x+n}}{v^x . l_x} $$

Il prodotto $v^n . l_x$ viene indicato con il simbolo Dx, detto simbolo di commutazione, cioè $D_x = v^n . l_x$. Si ha quindi:

$$ {}_nE_x = \frac{D_{x+n}}{D_x} $$

I valori di Dx per il tasso del 4% sono calcolati e riportati su apposite tavole, dette tavole demografico-finanziarie, annesse alle tavole demografiche. Costruiamo con un foglio elettronico le tavole demografico-finanziarie per le persone di sesso maschile: si precisa che al momento riportiamo nel foglio elettronico di excel solo il simbolo di commutazione Dx.

Significato di nEx

Dobbiamo esaminare meglio il significato di nEx.
Nella matematica finanziaria, il termine v^n è **detto fattore finanziario di sconto** e permette di valutare il capitale di un euro, esigibile dopo n anni.
Il fattore nEx, ora introdotto, è detto **fattore attuariale di sconto** ed è il valore attuariale di un euro esigibile da una persona di età x dopo n anni, se sarà in vita.
Poiché ${}_nE_x = v^n \cdot {}_np_x$, essendo la probabilità ${}_np_x$ <1 , è sempre ${}_nE_x < v^n$
In matematica finanziaria, il fattore $(1+i)^n$, reciproco del fattore di sconto, è il **fattore finanziario di capitalizzazione composta** che permette di calcolare il montante di un euro dopo n anni.

Analogamente $\dfrac{1}{{}_nE_x}$ è detto f**attore attuariale di capitalizzazione** e permette di calcolare il montante fra n anni di un euro versato oggi da una persona di x anni, montante esigibile solo se quella persona sarà in vita. Si può così calcolare la somma assicurata, noto il premio U pagato. Confrontando il fattore di capitalizzazione attuariale con il fattore di capitalizzazione finanziario risulta:

$$\frac{1}{{}_nE_x} > (1+i)^n$$

Tavole demografico-finanziarie

Microsoft Excel - tavole Palazzo-Fantaccione

File Modifica Visualizza Inserisci Formato Strumenti Dati Finestra ?

D4 f_x =B4/POTENZA(1,04;A4)

Tavole demografico-finanziarie Italia maschi 2002 (i=4%)

ETÀ x	lx	$d_x = l_x - l_{x+1}$	$D_x = (1+i)^{-x}.l_x$
0	100.000	597	100000,00
1	99.403	34	95579,81
2	99.369	29	91872,23
3	99.340	24	88312,90
4	99.316	20	84895,73
5	99.296	18	81614,07
6	99.278	17	78460,85
7	99.261	15	75430,20
8	99.246	16	72518,08
9	99.230	15	69717,68
10	99.215	16	67026,10
11	99.199	17	64437,78
12	99.182	20	61948,78
13	99.162	25	59554,13
14	99.137	33	57249,15
15	99.104	44	55028,93
16	99.060	56	52888,94
17	99.004	70	50826,00
18	98.934	81	48836,60
19	98.853	89	46919,83
20	98.764	95	45074,60
21	98.669	97	43299,27
22	98.572	100	41592,99
23	98.472	102	39952,68
24	98.370	99	38376,25

Tavole sopravvivenza e mort. | Tavole demografico-finanziarie | Foglio3

Esercizio n. 5

Il sig. Rossi Mario di 35 anni stipula un'assicurazione per garantirsi il capitale di € 16.000 al compimento dei 65 anni, se sarà in vita.

Calcolare il premio unico puro.

Svolgimento:

Utilizzando la Tavola demografico-finanziaria creata precedentemente, con un tasso del 4% si ricava:

$$U = C \bullet {}_{n}E_{x} = C \bullet \frac{D_{x+n}}{D_x} = 16.000 \bullet \frac{D_{65}}{D_{35}} = 16.000 \bullet \frac{6.460,01}{24.622,86} = 4.198,40$$

Esercizio n. 6

Un 40-enne paga un premio unico puro di € 26.000 per un'assicurazione di capitale differito. Quale capitale potrà ritirare al compimento dei 62 anni se sarà in vita?

Svolgimento:

Dall'equazione $26.000 = C \bullet {}_{22}E_{40}$

si ricava: $$C = 26.000 \bullet \frac{1}{{}_{22}E_{40}} = 26.000 \bullet \frac{D_{40}}{D_{62}} = 26.000 \bullet \frac{20.092,60}{7.596,04} = 68.772,60$$

Versando oggi il premio di € 26.000 potrà ritirare a 62 anni il capitale di € 68.772,60

Esercizi da svolgere

Esercizio n. 7

Calcolare la probabilità per due fratelli di 40 e 42 anni:

a) che almeno uno sia in vita fra 30 anni;
b) di essere in vita entrambi fra 13 anni.

Esercizio n. 8

Per un uomo di 35 anni calcolare:

a) la probabilità di sopravvivere altri 20 anni;
b) la probabilità di morire entro 25 anni;
c) la probabilità di raggiungere i 70 anni e morire entro un anno;
d) la vita probabile.

Esercizio n. 9

Un signore di 32 anni vuole investire il capitale di € 15.000 per 20 anni.
Calcolare:

a) quale montante si costituisce in banca al tasso del 4%;
b) quale capitale può assicurare a se stesso fra 20 anni, se in vita, con un'assicurazione di capitale differito.

Esercizio n.10

Calcolare il premio unico puro del signor Mario se vuole garantirsi il capitale di €32.000 al compimento di 78 anni, se sarà in vita. Si consideri un tasso del 4% e un'età, all'atto della stipula dell'assicurazione, pari a 30 anni.

Esercizio 11

Il signor Dario di 27 anni stipula una assicurazione per garantirsi il capitale di € 20.000 al compimento dei 50 anni se in vita e il capitale di € 35.000 al compimento dei 60 anni, sempre a condizione di essere in vita.

Calcolare il premio unico puro complessivo che deve pagare.

Svolgimento:

Il contratto è costituito da due assicurazioni di capitale differito e quindi, per il principio di composizione dei contratti, il premio unico puro è uguale alla somma dei due premi unici.

$$U = 20.000 \bullet {}_{23}E_{27} + 35.000 \bullet {}_{33}E_{27} = 20.000 \frac{D_{50}}{D_{27}} + 35.000 \frac{D_{60}}{D_{27}} = 16.437{,}00$$

Il signor Dario deve pagare il premio unico puro complessivo di € 16.437,00

Esercizio 9 (pagina 23)

Un signore di 32 anni vuole investire il capitale di € 15.000 per 20 anni.

Calcolare:

a) quale montante si costituisce in banca al tasso del 4%;

b) quale capitale può assicurare a se stesso fra 20 anni, se in vita, con un'assicurazione di capitale differito.

Svolgimento:

Si ricava : a)

$$M = 15.000 \bullet 1{,}04^{20} = 32.866{,}85$$

b)

$$C = 15.000 \bullet \frac{1}{{}_{20}E_{32}} = 15.000 \bullet \frac{D_{32}}{D_{52}} = 34.314{,}00$$

Come osservato nell'esercizio 9, il montante attuariale risulta maggiore del montante finanziario. Bisogna però tenere conto che il montante finanziario è certo esigibile da quella persona o dai suoi eredi, mentre il montante attuariale è legato all'esistenza in vita della persona.

Esercizio n. 12

Risolvere il problema 9 nell'ipotesi che a stipulare il contratto sia un 50-enne.

Svolgimento:

In questo caso il montante accumulato in banca sarebbe il medesimo, mentre per l'assicurazione si avrebbe:

$$C' = 15.000 \bullet \frac{1}{{}_{20}E_{50}} = 15.000 \bullet \frac{D_{50}}{D_{70}} = 41.976{,}00$$

Che risulta superiore al precedente.

Assicurazione di rendita vitalizia

Con l'assicurazione di rendita vitalizia, l'assicurato si garantisce una successione di capitali, dette rate, esigibili periodicamente a condizione di essere in vita alle scadenze fissate. Queste rendite, a differenza delle rendite studiate in matematica finanziaria che sono esigibili comunque (e per questo sono dette "certe"), sono esigibili solo se l'assicurato è in vita.

Si distinguono quattro tipi di rendite vitalizie:

a) immediate illimitate;

b) differite illimitate;

c) immediate temporanee;

d) differite temporanee.

Ogni rendita può essere *anticipata* o *posticipata*, però tale distinzione non è essenziale, anzi, talvolta può confondere e perciò è più utile l'indicazione della scadenza della prima rata.

Il comitato permanente del congresso internazionale degli attuari (Madrid 1954) ha proposto di indicare con $\ddot{a}$ **il valore attuale di una rendita anticipata** e con a il valore attuale di una rendita posticipata.

Osserviamo che *per le rendite vitalizie* non si parla di rendite perpetue, come nel caso delle rendite certe, ma di *rendite illimitate*, intendendo con ***rendite illimitate le rendite che durano finché la persona è in vita***.

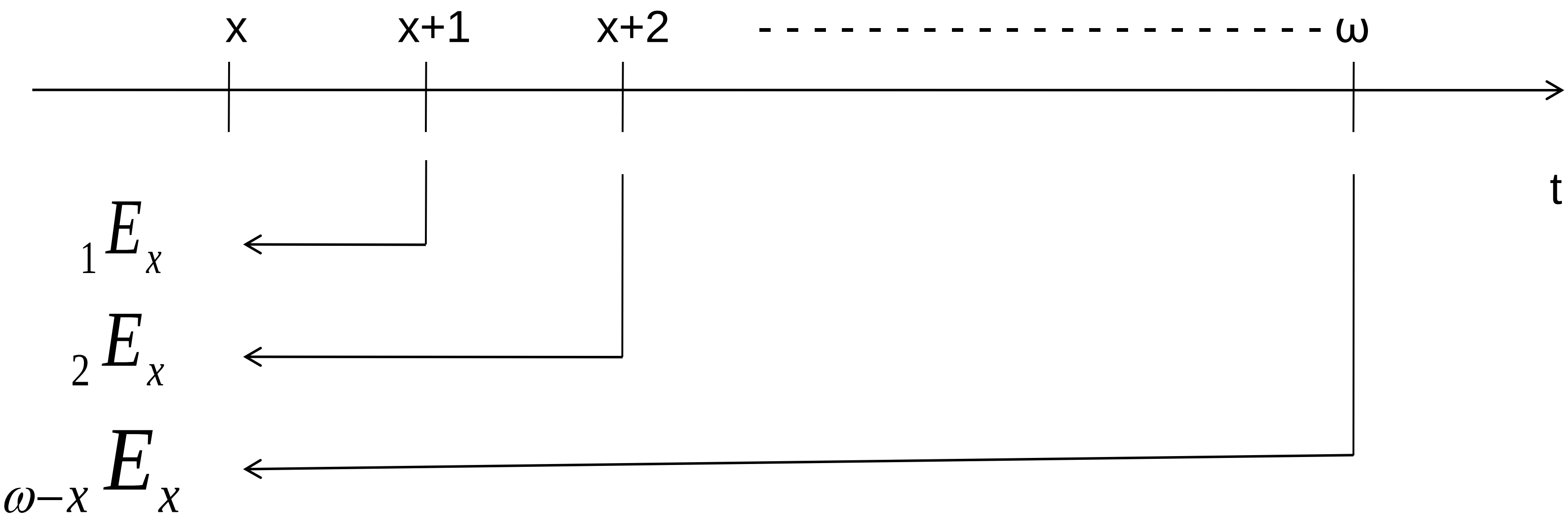
Quando si parla di ***rendita temporanea*** *per n anni* si intende che la durata è al massimo di n anni, se la persona muore prima, la rendita cessa al momento della sua morte.

Si possono considerare *rendite annue* e *rendite frazionate,* ma nel nostro studio ci limiteremo a rendite annue di rata costante. Per determinare il premio puro di una rendita scomponiamo la rendita in tante assicurazioni di capitale differito quante sono le rate e quindi il premio unico puro è uguale alla somma dei relativi premi.

a) Rendita vitalizia immediata illimitata

Con questa assicurazione, la persona ha diritto a riscuotere la rata già dalla stipulazione del contratto (se la rendita è anticipata), oppure dopo un anno (se la rendita è posticipata), finché sarà in vita.

Esaminiamo dapprima il calcolo del valore attuale di una ***rendita unitaria immediata anticipata illimitata*** , ossia tale che la prima rata è esigibile alla stipulazione del contratto e l'ultima all'età estrema. Rappresentiamo l'operazione con uno schema temporale:



Il premio unico (cioè il valore attuale attuariale della rendita) è uguale alla somma dei valori attuariali delle singole rate e si indica con il simbolo $\ddot{a}_x$ (dove x è l'età della persona assicurata).

a) Rendita vitalizia immediata illimitata

Tenendo conto che la prima rata, essendo esigibile subito, ha il valore 1, si ha:

$$\ddot{a}_x = 1 + {}_1E_x + {}_2E_x + {}_3E_x + \ldots\ldots + {}_{\omega-x}E_x$$

Ed esplicitando, si ricava:

$$\ddot{a}_x = 1 + \frac{D_{x+1}}{D_x} + \frac{D_{x+2}}{D_x} + \ldots\ldots + \frac{D_\omega}{D_x} = \frac{D_x + D_{x+1} + D_{x+2} + \ldots\ldots\ldots + D_\omega}{D_x}$$

Per il calcolo basterebbe sommare tutti i Dx dall'età x fino all'età estrema ω. Nelle tavole demografiche finanziarie è già calcolata questa somma ed è indicata con il simbolo di commutazione N_x ; precisamente: $N_x = D_x + D_{x+1} + \ldots\ldots + D_\omega$

Quindi, il *premio unico puro* per una assicurazione **di rendita unitaria immediata illimitata anticipata** è:

$$\ddot{a}_x = \frac{N_x}{D_x}$$

Il premio unico puro per la rata R è:

$$U = R \bullet \ddot{a}_x = R \bullet \frac{N_x}{D_x}$$

Se la rendita, anziché anticipata, è posticipata (ossia se la prima rata è esigibile all'età x+1), è sufficiente togliere dalla somma precedente la prima rata di un euro; indicando con a_x il valore attuale attuariale della rendita posticipata illimitata, si ha:

$$a_x = {}_1E_x + {}_2E_x + {}_3E_x + ... + {}_{\omega - x}E_x =$$

$$= \frac{D_{x+1} + D_{x+2} + ... + D_{\omega}}{D_x} = \frac{N_{x+1}}{D_x}$$

Quindi, il premio unico puro per una rendita vitalizia unitaria illimitata posticipata (ossia con la prima rata esigibile dopo un anno), è:

$$a_x = \frac{N_{x+1}}{D_x}$$

e analogamente se la rata è R.

$$U = R \bullet a_x = R \bullet \frac{N_{x+1}}{D_x}$$

I valori di Nx sono calcolati e riportati sulle apposite tavole demografico-finanziarie. Costruiamo con il foglio elettronico le tavole demografico-finanziarie per le persone di sesso maschile: si precisa che verrà aggiunto il simbolo di commutazione Nx , in corrispondenza della colonna E, subito dopo la colonna già esistente del simbolo di commutazione Dx.

Microsoft Excel - tavole Palazzo-Fantaccione

E4 f_x =SOMMA(D4:D113)

Tavole demografico-finanziarie Italia maschi 2002 (i=4%)

ETÀ x	lx	$d_x = l_x - l_{x+1}$	$D_x = (1+i)^{-n} \cdot l_x$	$N_x = D_x + D_{x+1} + \dots + D_\omega$
0	100.000	597	100000,00	2425434,09
1	99.403	34	95579,81	2325434,09
2	99.369	29	91872,23	2229854,28
3	99.340	24	88312,90	2137982,05
4	99.316	20	84895,73	2049669,16
5	99.296	18	81614,07	1964773,42
6	99.278	17	78460,85	1883159,35
7	99.261	15	75430,20	1804698,50
8	99.246	16	72518,08	1729268,30
9	99.230	15	69717,68	1656750,22
10	99.215	16	67026,10	1587032,54
11	99.199	17	64437,78	1520006,44
12	99.182	20	61948,78	1455568,66
13	99.162	25	59554,13	1393619,88
14	99.137	33	57249,15	1334065,75
15	99.104	44	55028,93	1276816,60
16	99.060	56	52888,94	1221787,67

Esercizio n. 13

Il signor Rossi di 46 anni vuole garantirsi una rendita vitalizia di € 20.000 annui. Determinare il premio unico puro nel caso in cui la rendita duri tutta la vita con la prima rata esigibile subito, dopodiché calcolare il premio unico puro con prima rata posticipata. Per il calcolo si consideri un tasso tecnico del 4%.\

Svolgimento:

a) Il premio unico puro per una assicurazione di rendita immediata illimitata anticipata con rata R è:

$$U = R \bullet \ddot{a}_x = R \bullet \frac{N_x}{D_x}$$

$$U = 20.000 \bullet \ddot{a}_{46} = R \bullet \frac{N_{46}}{D_{46}} = 20.000 \bullet \frac{281.634,84}{15.698,24} = 358.810,00$$

b) Il premio unico puro per una assicurazione di rendita immediata illimitata posticipata con rata R è:

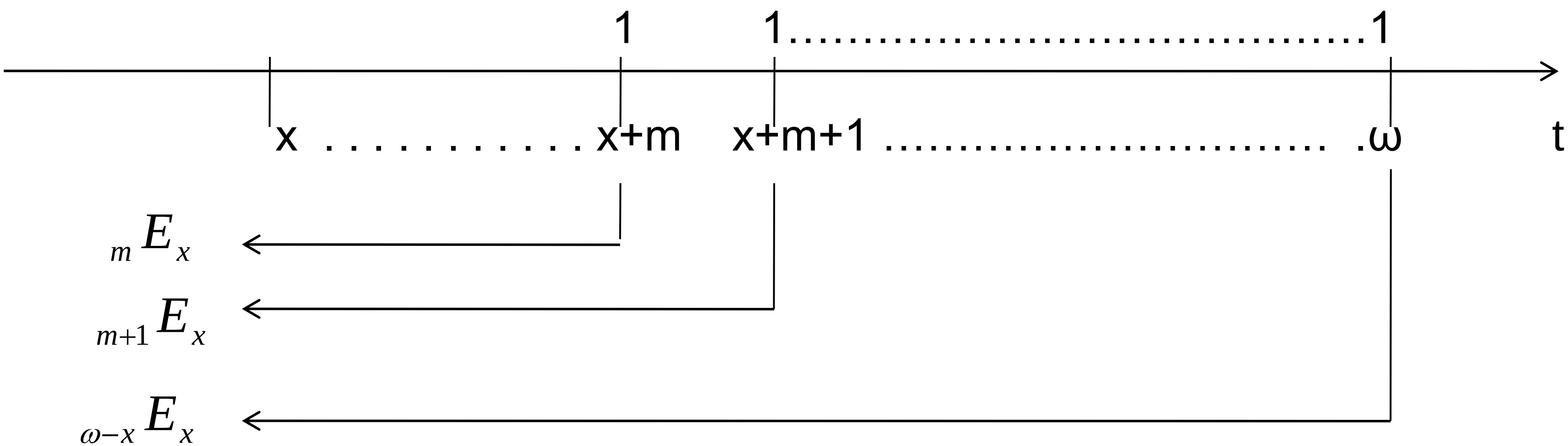
$$U = R \bullet a_x = R \bullet \frac{N_{x+1}}{D_x} = 20.000 \bullet \frac{N_{46+1}}{D_{46}} = 20.000 \bullet \frac{265.936,61}{15.698,24} = 338.810,00$$

b) Rendita vitalizia differita illimitata

Con questa assicurazione la persona ha diritto a riscuotere la rata della rendita non subito, ma dopo m anni dalla stipulazione del contratto finché sarà in vita.

Anche qui si possono distinguere le rendite differite in posticipate o anticipate, però indicando la scadenza della prima rata **si possono considerare solo le rendite anticipate**. Infatti, una rendita differita di m anni e posticipata equivale a una rendita anticipata differita di m+1 anni. Consideriamo perciò soltanto le rendite anticipate (con l'avvertenza indicata per le posticipate). Calcoliamo il premio unico puro (cioè il valore attuale attuariale) di una rendita vitalizia differita di m anni anticipata illimitata unitaria, che si indica con il simbolo $_{m/}\ddot{a}_x$.

L'operazione è rappresentata dallo schema seguente



b) Rendita vitalizia differita illimitata

Valutando le varie rate all'epoca della stipulazione del contratto, si ha:

$$_{m/}\ddot{a}_x = {}_mE_x + {}_{m+1}E_x + ... + {}_{\omega-x}E_x = \frac{D_{x+m}}{D_x} + \frac{D_{x+m+1}}{D_x} + ... + \frac{D_\omega}{D_x} =$$

$$_{m/}\ddot{a}_x = \frac{D_{x+m} + D_{x+m+1} + ... + D_\omega}{D_x}$$

Il premio unico puro per una assicurazione di **rendita unitaria anticipata illimitata differita di m anni,** utilizzando il simbolo di commutazione Nx, è:

$$_{m/}\ddot{a}_x = \frac{N_{x+m}}{D_x}$$

Il premio unico per la rata R è:

$$U = R \bullet {}_{m/}\ddot{a}_x = R \bullet \frac{N_{x+m}}{D_x}$$

Per quanto detto in precedenza, se la rendita è posticipata può essere traslata in anticipata e differita di m+1 anni e quindi risulta: $_{m/}a_x = {}_{m+1/}\ddot{a}_x$

Osserviamo che le rendite illimitate, sia immediate che differite, sono le più comuni, e vengono dette pensioni. Le persone giovani,sono più propense a stipulare rendite differite, mentre le persone anziani preferiscono rendite immediate.

Esercizio n. 14

Il signor Bianchi di 36 anni vuole garantirsi una rendita vitalizia illimitata di € 12.000 annui. Determinare il premio unico puro nel caso in cui la rendita sia illimitata con la prima rata scadente a 60 anni. Per il calcolo si consideri un tasso tecnico del 4%.

Svolgimento:

Il premio unico puro per una assicurazione di rendita vitalizia differita illimitata anticipata con rata R è:

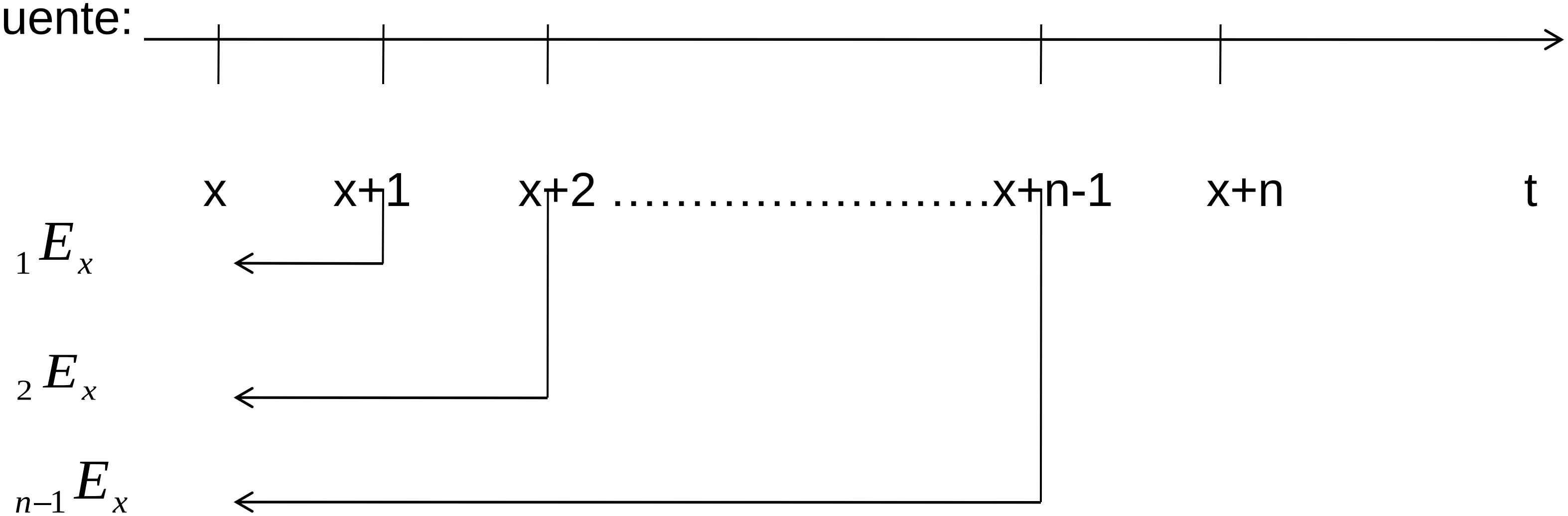
$$U = R \bullet {}_{m/}\ddot{a}_x = R \bullet \frac{N_{x+m}}{D_x}$$

quindi :

$$U = 12.000 \bullet {}_{24/}\ddot{a}_{36} = 12.000 \bullet \frac{N_{60}}{D_{36}} = 12.000 \bullet \frac{113.183{,}10}{23.643{,}42} = 12.000 \bullet 4{,}7871 = 57.445{,}20$$

c) Rendita vitalizia immediata temporanea

Meno importanti sono in pratica le rendite vitalizie temporanee, sia immediate che differite. Con questa assicurazione la persona ha diritto a riscuotere la rata della rendita alla stipulazione del contratto se la rendita è anticipata, dopo un anno se la rendita è posticipata, per la durata di n anni, purché sia in vita.
Calcoliamo il premio unico puro (cioè il valore attuale attuariale) di una rendita vitalizia unitaria immediata temporanea per n anni anticipata.
Tale rendita si indica con il simbolo ${}_{/n}\ddot{a}_x$. L'operazione è schematizzata nel grafico seguente:



Il premio unico puro è dato da:

$$ {}_{/n}\ddot{a}_x = 1 + {}_1E_x + {}_2E_x + \ldots\ldots + {}_{n-1}E_x = 1 + \frac{D_{x+1}}{D_x} + \frac{D_{x+2}}{D_x} + \ldots\ldots + \frac{D_{x+n-1}}{D_x} = $$

e quindi:

c) Rendita vitalizia immediata temporanea

Il premio unico puro è dato da: $$ {}_{/n}\ddot{a}_x = \frac{D_x + D_{x+1} + ... + D_{x+n-1}}{D_x} = $$

La somma a numeratore è una somma tronca; si vede facilmente che si può scrivere come differenza di due simboli di commutazione N; infatti: $N_x = D_x + D_{x+1} + ... + D_\omega$

$$ D_x + D_{x+1} + ... + D_{x+n-1} = $$

$$ = D_x + D_{x+1} + ... + D_{x+n-1} + (D_{x+n} + ... + D_\omega) - (D_{x+n} + ... + D_\omega) = $$

$$ = N_x - N_{x+n} $$

Il premio unico puro per una assicurazione di **rendita immediata anticipata unitaria temporanea per n anni** è:

$$ {}_{/n}\ddot{a}_x = \frac{N_x - N_{x+n}}{D_x} $$

Il premio unico puro per la rata R è:

$$ U = R \bullet {}_{/n}\ddot{a}_x = R \bullet \frac{N_x - N_{x+n}}{D_x} $$

La relazione può essere interpretata come differenza fra due rendite illimitate, la prima immediata e la seconda differita con la stessa rata R.

d) Rendita vitalizia differita temporanea

Con questa assicurazione, una persona di età x si garantisce il godimento di n rate (al più) con inizio fra m anni.

Con passaggi analoghi ai precedenti si ricava che il premio unico puro per un'assicurazione di **rendita anticipata unitaria differita di m anni e temporanea di n anni,** è:

$$_{m/n}\ddot{a}_x = \frac{N_{x+m} - N_{x+m+n}}{D_x}$$

Esercizio N.15

Il sig. Matteo di 36 anni vuole garantire una rendita vitalizia di € 12.000 annui. Determinare il premio unico puro nei seguenti casi :

a) la rendita abbia una durata di 25 anni con la prima rata scadente fra un anno;

b) la rendita abbia una durata di 20 anni con la prima rata scadente al compimento dei 48 anni; (si consideri in entrambi i casi un tasso del 4%).

Svolgimento:

a) $$U = 12.000 \bullet {}_{/25}a_{36} = 12.000 \bullet \frac{N_{37} - N_{62}}{D_{36}} = 182.391{,}60 euro$$

b) $$U = 12.000 \bullet {}_{12/20}\ddot{a}_{36} = 12.000 \bullet \frac{N_{48} - N_{68}}{D_{36}} = 98.478{,}00 euro$$

Esercizio N.16

Il sig. Marco di 46 anni vuole garantire una rendita vitalizia di € 22.000 annui. Determinare il premio unico puro nei seguenti casi :

a) la rendita abbia una durata di 25 anni con la prima rata scadente fra un anno;
b) la rendita abbia una durata di 20 anni con la prima rata scadente al compimento di 48 anni.

Si consideri un tasso di interessi del 4%.

Svolgimento:

Il premio unico puro delle varie rendite si ottiene con la semplice applicazione delle formule:

a) Trattandosi di rendita vitalizia immediata posticipata temporanea per n anni, si ha:

$$U = 22.000 \bullet {}_{/25}a_{46} = 22.000 \bullet \frac{N_{47} - N_{72}}{D_{46}} = 22.000 \bullet 14{,}5684 = €320.504{,}80$$

b) Poiché trattasi di rendita anticipata differita di m anni e temporanea di n anni, si ha:

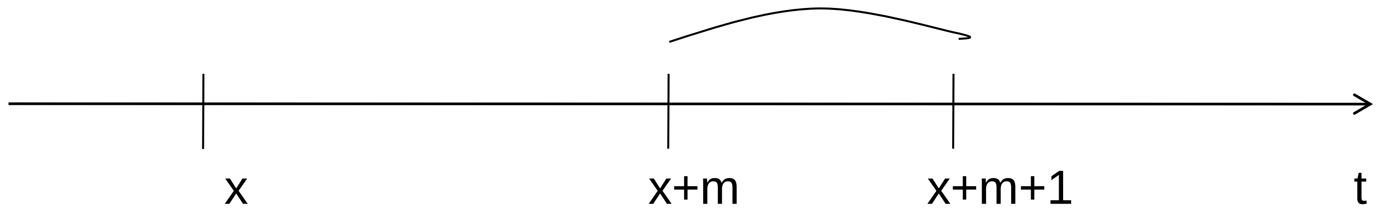
$$U = 22.000 \bullet {}_{2/20}\ddot{a}_{46} = 22.000 \bullet \frac{N_{48} - N_{68}}{D_{46}} = €271.917{,}80$$

Assicurazione in caso di morte

Le assicurazioni in caso di morte impegnano la Compagnia di Assicurazione al pagamento della somma assicurata, nel caso si verifichi la morte dell'assicurato durante il periodo previsto dal contratto. Come per le rendite, vi sono vari tipi di assicurazioni in caso di morte, secondo il periodo assicurato.

Consideriamo per prima **l'assicurazione elementare di morte**, che interessa solo da un punto di vista teorico, ma permette di ricavare le formule di tutte le altre assicurazioni. L'assicurazione si impegna a pagare il capitale di un euro fra (m+1) anni, se l'assicurato morirà nell'anno compreso fra le età (x+m) e (x+m+1)

Nello schema evidenziamo con un arco il periodo coperto da assicurazione:



Anche in questo caso, come per l'assicurazione di capitale differito, l'impegno dell'assicurazione è una variabile casuale:

S=valore attuale delle somme che saranno pagate, avente distribuzione:

S	0	v^{m+1}
P	$1-{}_{m/}q_x$	${}_{m/}q_x$

Assicurazione in caso di morte

E quindi il valore medio, che rappresenta il premio unico puro e si indica con ${}_{m/1}A_x$

Risulta:

$$ {}_{m/1}A_x = 0 \bullet (1 - {}_{m/}q_x) + v^{m+1} \bullet {}_{m/}q_x = v^{m+1} \bullet {}_{m/}q_x $$

Trasformando questa relazione, si può scrivere:

$$ {}_{m/1}A_x = v^{m+1} \bullet \frac{d_{x+m}}{lx} = \frac{v^{m+1} \bullet v^{x} \bullet d_{x+m}}{v^{x} \bullet l_x} $$

Introducendo un nuovo simbolo di commutazione: $C_x = v^{x+1} \bullet d_x$

Si ha: ${}_{m/1}A_x = \dfrac{C_{x+m}}{D_x}$

Esaminiamo ora le assicurazioni di morte che hanno durata pluriennale e quindi si possono considerate come somma di tante assicurazioni elementari di morte quanti sono gli anni stabiliti dal contratto.

Prima di esaminare le assicurazioni di morte, andiamo ad aggiungere l'indice di commutazione Cx nel foglio elettronico.

Si precisa che verrà aggiunto il simbolo di commutazione Cx , in corrispondenza della colonna F, subito dopo la colonna già esistente del simbolo di commutazione Nx.

Microsoft Excel - tavole Palazzo-Fantaccione

F4 =C4/POTENZA(1,04;(A5))

Tavole demografico-finanziarie Italia maschi 2002 (i=4%)

ETÀ x	l_x	$d_x = l_x - l_{x+1}$	$D_x = (1+i)^{-x} . l_x$	$N_x = D_x + D_{x+1} + .. + D_\omega$	$C_x = (1+i)^{-(x+1)} \bullet d_x$
0	100.000	597	100000,00	2425434,09	574,0385
1	99.403	34	95579,81	2325434,09	31,4349
2	99.369	29	91872,23	2229854,28	25,7809
3	99.340	24	88312,90	2137982,05	20,5153
4	99.316	20	84895,73	2049669,16	16,4385
5	99.296	18	81614,07	1964773,42	14,2257
6	99.278	17	78460,85	1883159,35	12,9186
7	99.261	15	75430,20	1804698,50	10,9604
8	99.246	16	72518,08	1729268,30	11,2414
9	99.230	15	69717,68	1656750,22	10,1335
10	99.215	16	67026,10	1587032,54	10,3933
11	99.199	17	64437,78	1520006,44	10,6181
12	99.182	20	61948,78	1455568,66	12,0115
13	99.162	25	59554,13	1393619,88	14,4369
14	99.137	33	57249,15	1334065,75	18,3237
15	99.104	44	55028,93	1276816,60	23,4920
16	99.060	56	52888,94	1221787,67	28,7489

Assicurazione in caso di morte, vita intera

Introducendo un altro simbolo di commutazione che evita il calcolo della somma al numeratore, precisamente $M_x = C_x + C_{x+1} + ... + C_\omega$,

si ricava: $A_x = \dfrac{M_x}{D_x}$

Dove **Ax è il valore attuale attuariale di un euro** , pagabile alla fine dell'anno in cui avverrà la morte dell'assicurato, in qualunque anno avvenga il decesso.
Se il capitale assicurato è C, il premio unico puro per **un'assicurazione di morte immediata vita intera** è quindi:

$$U = C \bullet A_x = C \bullet \frac{M_x}{D_x}$$

Prima di esaminare l'assicurazione in caso di morte temporanea, andiamo ad aggiungere l'indice di commutazione Mx nel foglio elettronico.

Si precisa che verrà aggiunto il simbolo di commutazione Mx , in corrispondenza della colonna G, subito dopo la colonna già esistente del simbolo di commutazione Cx.

File Modifica Visualizza Inserisci Formato Strumenti Dati Finestra ?

G4 =SOMMA(F4:F113)

Tavole demografico-finanziarie Italia maschi 2002 (i=4%)

ETÀ x	l_x	$d_x = l_x - l_{x+1}$	$D_x = (1+i)^{-n} . l_x$	$N_x=D_x+D_{x+1}+..+D_\omega$	$C_x = (1+i)^{-(x+1)} \bullet d_x$	$M_x = C_x + C_{x+1} + ... + C_\omega$
0	100.000	597	100000,00	2425434,09	574,0385	6.714,0735
1	99.403	34	95579,81	2325434,09	31,4349	6.140,0351
2	99.369	29	91872,23	2229854,28	25,7809	6.108,6002
3	99.340	24	88312,90	2137982,05	20,5153	6.082,8193
4	99.316	20	84895,73	2049669,16	16,4385	6.062,3040
5	99.296	18	81614,07	1964773,42	14,2257	6.045,8654
6	99.278	17	78460,85	1883159,35	12,9186	6.031,6398
7	99.261	15	75430,20	1804698,50	10,9604	6.018,7212
8	99.246	16	72518,08	1729268,30	11,2414	6.007,7608
9	99.230	15	69717,68	1656750,22	10,1335	5.996,5194
10	99.215	16	67026,10	1587032,54	10,3933	5.986,3860
11	99.199	17	64437,78	1520006,44	10,6181	5.975,9927
12	99.182	20	61948,78	1455568,66	12,0115	5.965,3745
13	99.162	25	59554,13	1393619,88	14,4369	5.953,3630
14	99.137	33	57249,15	1334065,75	18,3237	5.938,9262
15	99.104	44	55028,93	1276816,60	23,4920	5.920,6024
16	99.060	56	52888,94	1221787,67	28,7489	5.897,1105
17	99.004	70	50826,00	1168898,72	34,5540	5.868,3616

Assicurazione in caso di morte, temporanea

Con questo contratto, la Compagnia di Assicurazione si impegna a pagare agli eredi il capitale assicurato alla fine dell'anno in cui avverrà la morte dell'assicurato, se e solo se la morte avverrà entro n anni dalla stipulazione del contratto.

L'assicurazione risulta la somma di n assicurazioni elementari in caso di morte. Indicato con ${}_{/n}A_x$ il premio unico per l'assicurazione unitaria immediata temporanea di n anni, si ha:

$${}_{/n}A_x = {}_{/1}A_x + {}_{1/1}A_x + {}_{2/1}A_x + \ldots + {}_{n-1/1}A_x =$$

$$= \frac{C_x}{D_x} + \frac{C_{x+1}}{D_x} + \ldots. + \frac{C_{x+n-1}}{D_x} = \frac{C_x + C_{x+1} + \ldots. + C_{x+n-1}}{D_x}$$

Il numeratore è una somma tronca dei simboli Cx; con procedimento analogo a quello visto per le rendite vitalizie, si può scriverlo come differenza Mx-Mx+n e si ottiene il premio unico puro per un'assicurazione in caso di morte, unitaria, immediata e temporanea per n anni: ${}_{/n}A_x = \frac{M_x - M_{x+n}}{D_x}$ se il capitale assicurato è C il premio

Unico puro per l'assicurazione è:

$$U = C \bullet {}_{/n}A_x = C \bullet \frac{M_x - M_{x+n}}{D_x}$$

Assicurazione in caso di morte, differita

Le assicurazioni di morte differite sono poco frequenti nella pratica, vengono utilizzate soprattutto se vi sono capitali assicurati diversi in periodi diversi.
Con questo contratto la Compagnia di Assicurazione pagherà la somma stabilita solo se l'assicurato morirà dopo m anni dalla stipulazione del contratto. Indicando con $_{m/}A_x$ il premio unico puro, per l'assicurazione di morte differita a vita intera di capitale unitario, si ricava facilmente che il premio unico puro **per un'assicurazione in caso di morte, differita, illimitata** è :

$$_{m/}A_x = \frac{M_{x+m}}{D_x}$$

Assicurazione in caso di morte, differita e temporanea

Anche questo contratto, come il precedente, è raramente stipulato, ma viene utilizzato soprattutto nella composizione di contratti in caso di morte con capitali diversi.
Con questo contratto, l'assicurato garantisce agli eredi un capitale C se la sua morte avviene $_{m/}A_x$ dopo n anni dalla stipula del contratto ed entro gli n anni successivi.
Con procedimento analogo ai precedenti si ricava che il premio unico puro per **un'assicurazione in caso di morte, unitaria differita temporanea**, è:

$$_{m/n}A_x = \frac{M_{x+m} - M_{x+m+n}}{D_x}$$

Esercizio n.17

Calcolare il premio unico puro che un 28-enne deve pagare per assicurare agli eredi il capitale di € 100.000 alla fine dell'anno di morte nei seguenti casi:

a) in qualunque momento avvenga la sua morte;

b) se il decesso avviene entro i 65 anni;

c) se muore dal compimento dei 65 anni in poi.

Si precisa che il tasso di interesse è del 4%.

Svolgimento:

Applicando le formule relative ai vari tipi di assicurazioni si ricava:

a) $$U = 100.000 \bullet A_{28} = 100.000 \bullet \frac{M_{28}}{D_{28}} = €16.690,00$$

b) $$U = 100.000 \bullet {}_{/37}A_{28} = 100.000 \bullet \frac{M_{28} - M_{65}}{D_{28}} = €5.770,00$$

c) $$U = 100.000 \bullet {}_{37/}A_{28} = 100.000 \bullet \frac{M_{65}}{D_{28}} = €10.920,00$$

Assicurazioni in caso di morte con capitale pagabile all'atto della morte

Per il calcolo dei premi puri nelle varie forme di assicurazione di morte, si è supposto che il pagamento del capitale assicurato avvenga alla fine dell'anno di morte, però l'assicuratore, generalmente, paga il capitale assicurato all'atto del decesso dell'assicurato. Non essendo possibile alla stipulazione del contratto conoscere il momento esatto della morte dell'assicurato, si pone che, nell'insieme di tutti gli assicurati, i decessi siano distribuiti uniformemente lungo tutto l'anno e perciò per tutte le polizze si fa riferimento, come data del decesso di tutti gli assicurati, a metà anno e l'assicuratore, per comprendere la perdita degli interessi di mezzo anno, maggiora i premi unici puri di qualsiasi assicurazione in caso di morte, capitalizzandoli per 6 mesi, cioè moltiplicandoli per $(1+i)^{1/2}$.

Il **premio unico puro** per un'assicurazione in caso di morte, vita intera, con il capitale di un euro, **pagabile all'atto di morte** si indica con $\bar{A}_x$ è dato da:

$$\bar{A}_x = A_x (1+i)^{1/2}$$

Per il tasso al 4%, si calcola $1{,}04^{1/2}=1{,}0198039$

Quanto detto vale per tutte le assicurazioni in caso di morte.

Esercizio N. 18

Il Sig. Antonio di 38 anni con il pagamento del premio unico puro di € 30.000 intende garantire agli eredi un certo capitale, pagabile all'atto di morte se il decesso avviene prima del compimento dei 60 anni, un capitale doppio del precedente se la morte avviene dal compimento dei 60 anni entro i 70 e un capitale triplo del primo se la morte avviene dai 70 anni in poi. Calcolare l'importo dei capitali assicurati se il tasso è del 4%.

Indicato con C il primo capitale, con 2C il secondo e con 3C il terzo, si imposta l'equazione:

$$30.000 = C \bullet {}_{/22}\overline{A}_{38} + 2C \bullet {}_{22/10}\overline{A}_{38} + 3C \bullet {}_{32/}\overline{A}_{38}$$

$$30.000 = C \bullet \frac{M_{38} - M_{60}}{D_{38}} \bullet 1.04^{1/2} + 2C \bullet \frac{M_{60} - M_{70}}{D_{38}} \bullet 1.04^{1/2} + 3C \bullet \frac{M_{70}}{D_{38}} \bullet 1.04^{1/2}$$

$$C = \frac{30.000 \bullet D_{38}}{(M_{38} - M_{60} + 2M_{60} - 2M_{70} + 3M_{70}) \bullet 1{,}04^{1/2}} = €52.887{,}89$$

Pertanto fino a 60 anni il capitale assicurato è € 52.887,89, da 60 a 70 anni e € 105.775,79, da 70 anni in poi è € 158.663,69

Assicurazioni miste

Le assicurazioni in caso di vita costituiscono una forma di risparmio, in quanto vengono stipulate per provvedere alla necessità della vecchiaia, le assicurazioni in caso di morte costituiscono una forma di previdenza, in quanto garantiscono un certo capitale agli eredi.

Si stipulano sovente assicurazioni miste, formate combinando un'assicurazione in caso di vita (generalmente un'assicurazione di capitale differito), con un'assicurazione in caso di morte, temporanea o illimitata. Queste forme miste nelle quali l'assicuratore paga il capitale o all'assicurato o agli eredi hanno anche il vantaggio psicologico di soddisfare l'assicurato, che, per certe assicurazioni, pensa di versare il premio senza ricavare alcuna somma.

Vediamo le più importanti assicurazioni miste.

a) Assicurazione mista semplice

Con questo contratto l'assicurato, avente età x, garantisce a se stesso un capitale, se raggiunge l'età x+n, e lo stesso capitale ai suoi eredi, se la sua morte avviene prima del compimento dell'età x+n.

E' questo il tipo di contratto più frequentemente stipulato; sovente poi il capitale differito viene trasformato in una rendita illimitata, cioè in una pensione.

Questa forma assicurativa comprende un'assicurazione di capitale differito e un'assicurazione in caso di morte, immediata e temporanea. Il premio unico puro è la somma dei due premi.

Assicurazione mista semplice

Per il capitale di un euro, il premio si indica con $\overline{A}_{\overrightarrow{x:n}}$ se nell'assicurazione di morte il capitale è pagabile all'atto del decesso.

Si ricava:

$$\overline{A}_{\overrightarrow{x:n}} = {}_nE_x + {}_{/n}\overline{A}_x = \frac{D_{x+n} + (M_x - M_{x+n}) \bullet (1+i)^{1/2}}{D_x}$$

Il premio unico puro per un'**assicurazione mista semplice con capitale C**, esigibile in caso di premorienza all'atto del decesso, è:

$$U = C \bullet \frac{D_{x+n} + (M_x - M_{x+n}) \bullet (1+i)^{1/2}}{D_x}$$

b) Assicurazione mista doppia

È analoga all'assicurazione mista semplice, con la sola differenza che il capitale assicurato agli eredi è metà del capitale assicurato a se stesso.

Il premio unico puro per un'assicurazione mista doppia con capitale C, se il capitale in caso di morte è esigibile all'atto di morte, è:

$$U = C \bullet {}_nE_x + \frac{1}{2} C \bullet {}_{/n}\overline{A}_x$$

c) Assicurazione mista a capitale raddoppiato

Con questo contratto, l'assicurato garantisce a se stesso un capitale, se in vita all'età x+n e agli eredi lo stesso capitale alla sua morte, in qualunque momento essa avvenga. Quindi, il contratto è la composizione di un'assicurazione di capitale differito con una assicurazione in caso di morte vita intera. Osserviamo che, se l'assicurato muore prima di raggiungere l'età x+n, l'assicuratore paga agli eredi la somma assicurata. Se invece l'assicurato raggiunge l'età x+n, l'assicuratore gli corrisponde la somma assicurata e pagherà nuovamente la stessa somma agli eredi alla morte dell'assicurato. Per questo motivo si dice assicurazione a capitale raddoppiato, in quanto l'assicuratore può pagare due volte la somma assicurata. Il premio unico puro per un'**assicurazione mista a capitale raddoppiato,** se il capitale in caso di morte è esigibile all'atto di morte, è:

$$U = C \bullet {}_nE_x + C \bullet \overline{A}_x = C \bullet \frac{D_{x+n} + M_x \bullet (1+i)^{1/2}}{D_x}$$

Premi annui

Nella maggior parte dei contratti di assicurazione è contemplato il pagamento, in luogo del premio unico, di premi periodici, in generale annui.

Il premio annuo è pagato anticipatamente ed è legato all'esistenza in vita della persona assicurata. E' facile determinare la relazione fra il premio unico puro e i premi anni puri. Per l'assicuratore, i premi annui puri, essendo il loro pagamento condizionato dall'esistenza in vita dell'assicurato, costituiscono una **rendita vitalizia anticipata,** in generale **temporanea,** il cui valore attuale attuariale, per il principio di equivalenza finanziaria, è uguale al premio unico puro. Indicato con P il premio annuo costante per h anni, si ha la fondamentale relazione:

$$U = P \bullet {}_{/h}\ddot{a}_x$$

Il numero massimo h dei premi non può superare il differimento in caso di assicurazioni di capitale differito, di rendite differite, di assicurazioni miste e non può superare la durata nel caso di assicurazioni di morte temporanea.

Per le assicurazioni di rendite immediate non è concesso il pagamento del premio annuo. Per le assicurazioni di morte vita intera il premio può essere pagato per tutta la durata in vita dell'assicurato e in tal caso si parla di premio vitalizio e la relazione sopra diventa:

$$U = P \bullet \ddot{a}_x$$

Esercizio n. 19

Un signore di 28 anni stipula un'assicurazione mista semplice per il capitale di € 45.000 con scadenza a 58 anni e con capitale pagabile agli eredi, in caso di morte, all'atto del decesso.

Determinare il premio annuo che dovrà pagare per tutta la durata dell'assicurazione.

Svolgimento:

Il premio unico puro è dato da:

$$U = 45.000({}_{30}E_{28} + {}_{/30}\overline{A}_{28})$$

Per la relazione vista precedentemente, si ha che $U = P \bullet {}_{/30}\ddot{a}_{28}$ ed eguagliando i due valori di U si ottiene:

$$P\frac{N_{28} - N_{58}}{D_{28}} = 45.000\frac{D_{58} + (M_{28} - M_{58}) \bullet 1{,}04^{1/2}}{D_{28}}$$

quindi: $$P = 45.000\frac{D_{58} + (M_{28} - M_{58}) \bullet 1{,}04^{1/2}}{N_{28} - N_{58}} = €823{,}50$$

Il premio annuo che il signore dovrà pagare per 30 anni è di € 823,50.

Cenni sui premi di tariffa

I premi finora calcolati, sia unici sia annui, tengono conto solo degli impegni assunti dall'assicuratore per le varie forme di contratto, in base a una data tavola demografica e al tasso tecnico fissato. Le società di assicurazione, nella loro attività, sostengono costi di vario tipi e inoltre vogliono realizzare un guadagno, quindi fanno pagare un premio maggiorato, detto **premio di tariffa** o **caricato.**

Le spese sono sostanzialmente di tre tipi:

-**spese di acquisizione**, sostenute dall'assicuratore alla stipulazione del contratto e comprendenti la provvigione pagata all'agente produttore, le spese per la visita medica, ecc,;

-**spese di incasso,** sostenute dall'assicuratore per l'incasso dei premi (ad esempio, le percentuali pagate all'esattore);

-**spese di gestione,** che sono sostenute dall'assicuratore per gestione dell'impresa, come spese generali, retribuzioni al personale, tasse, ecc. e fra esse eventuale margine di guadagno; queste spese vengono calcolate per tutta la durata dell'assicurazione.

Il caricamento sui premi nel caso di contratti nei quali il pagamento del premio è unico è diverso dal caricamento operato nel caso di contratti con pagamento di premi annui, che sono legati all'esistenza in vita dell'assicurato. La determinazione del premio caricato è piuttosto complessa. In generale, si può applicare il caricamento come percentuale del premio puro, come percentuale del premio caricato stesso o come percentuale del capitale assicurato. Naturalmente l'assicurato conosce i relativi premi di tariffa per i vari contratti e può prendere le sue decisioni secondo le proprie esigenze.

Vediamo un esempio di applicazione del premio di tariffa.

Esercizio n. 20

Un 40-enne stipula un'assicurazione per garantire a sé una rendita vitalizia di € 12.000 annue dal compimento dei 65 anni illimitata e garantire agli eredi il capitale di € 100.000 in caso di morte prima del compimento dei 65 anni, esigibili all'atto del decesso.

Calcolare il premio unico di tariffa se la Società carica il premio puro del 30%**.**

Svolgimento

Si calcola dapprima il premio unico puro:

$$U = 12.000 \bullet {}_{25/}\ddot{a}_{40} + 100.000 \bullet {}_{/25}A_{40} =$$

$$= 12.000 \bullet \frac{N_{65}}{D_{40}} + 100.000 \bullet \frac{(M_{40} - M_{65}) \bullet 1{,}04^{1/2}}{D_{40}} = 50.914{,}38$$

Il premio di tariffa risulta: $U' = U + 0{,}30U = 66.188{,}69$

Pertanto il premio unico di tariffa è di € 66.188,69